CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”
Etapa locală, 19.02.2017
Filiera tehnologică: profil tehnic

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a X-a

1. Fie

$$S_1=\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2017}+\sqrt{2016}}$$ şi

$$S_2=\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{2017\sqrt{2016}+2016\sqrt{2017}}.$$

a) (3p) Calculați S_1;

b) (2p) Calculați S_2 ;

c) (2p) Arătați că $\left[\frac{S_1}{S_2}\right]=44$.

Soluție:

a) Se raționalizează numitorii în expresia dată.......................................2p

$$S_1=\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2017}+\sqrt{2016}}=\frac{\sqrt{2}-1}{2-1}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2}+\frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{4-3}+\ldots+\frac{\sqrt{2017}-\sqrt{2016}}{2017-2016}$$

$S_1=\sqrt{2017}-1$ 1p

b) Se raționalizează numitorii în expresia dată.......................................1p

$$S_2=\frac{2\sqrt{1}-1\sqrt{2}}{4-2}+\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{18-12}+\frac{4\sqrt{3}-3\sqrt{4}}{48-36}+\ldots+\frac{2017\sqrt{2016}-2016\sqrt{2017}}{2017^2\cdot2016-2016^2\cdot2017}$$

$$S_2=\frac{2\sqrt{1}-1\sqrt{2}}{2\cdot1}+\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{3\cdot2}+\frac{4\sqrt{3}-3\sqrt{4}}{4\cdot3}+\ldots+\frac{2017\sqrt{2016}-2016\sqrt{2017}}{2017\cdot2016}$$

$$=\frac{2\sqrt{1}}{2\cdot 1}-\frac{1\sqrt{2}}{2\cdot 1}+\frac{3\sqrt{2}}{3\cdot 2}-\frac{2\sqrt{3}}{3\cdot 2}+\frac{4\sqrt{3}}{4\cdot 3}-\frac{3\sqrt{4}}{4\cdot 3}+\ldots+\frac{2017\sqrt{2016}}{2017\cdot 2016}-\frac{2016\sqrt{2017}}{2017\cdot 2016}$$

$$=\frac{\sqrt{1}}{1}-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{4}}{4}+\ldots+\frac{\sqrt{2016}}{2016}-\frac{\sqrt{2017}}{2017}$$

$=1-\frac{1}{\sqrt{2017}}$ **(1p)**

c) $\frac{S_1}{S_2}=\frac{\sqrt{2017}-1}{1-\frac{1}{\sqrt{2017}}}=\sqrt{2017}$ **(1p)**

$\sqrt{2017}\in(44,45)\Rightarrow\left[\frac{S_1}{S_2}\right]=44$.**(1p)**

2. Să se găsească numerele reale x si y dacă:

$$3\cdot\sqrt{x^2-2y}+(1-i)x^2=2(1+2i)y+4-19i.$$

Soluție:

Egalând părtile reale și părțile imaginare din cei doi membri

$\begin{cases}3\sqrt{x^2-2y}+x^2-2y=4\\ x^2+4y=19\end{cases}$ 2p

Notăm $\sqrt{x^2-2y}=t>0$ ………………………………………………2p

$t^2+3t-4=0$, $t_1=1; t_2=-4\Longrightarrow t=1$………….. …………………1p

$y=3, x^2=7$ …………………………………………………………..1p

$(x,y)\in\{(-\sqrt{7};3);(\sqrt{7};3)\}$………………………………………………1p

3. a) Calculați $N=3^{1+\log_3 7}-2^{\log_4 121}$.

4. b) Să se rezolve ecuația: $\log_2(x^2-8)+\log_{\frac{1}{2}}(x^2-5x+7)=0$.

Soluție:

a) $3^{1+\log_3 7}=3^{\log_3 21}=21, 2^{\log_4 121}=2^{\log_2 11}=11$ (2p)

Prin urmare $N=21-11=10$ (1p)

b) Condițiile de existență ale logaritmilor conduc la
$x\in(-\infty,-2\sqrt{2})\cup(2\sqrt{2},+\infty)$.(1p)
$\log_{\frac{1}{2}}(x^2-5x+7)=-\log_2(x^2-5x+7)$(1p)
Rezolvăm ecuația (1p)
Finalizare (1p)

5. Funcţia $P:[0,15] \to \mathbb{R}, P(t) = 132 \cdot e^{-0,07t}$ modelează scăderea pulsului unui alergător după terminarea unei curse (bătăi ale inimii pe minut). La cât timp după terminarea cursei, pulsul ajunge la 66 de bătăi pe minut. (Se consideră ln2≈0,7).

Soluție:

$132 \cdot e^{-0,07t} = 66$ 1p

$e^{-0,07t} = \frac{1}{2}$ 2p

$-0,07t = -\ln 2$ 3p

t=10 minute....................................1p